المحاضرة الرابعة عشر

مبرهنة: إذا كان f تابعاً عقدياً مستمراً على منطقة G، Γ طريقاً في G، وكان لـ f تابعاً أصلياً F على G، فإنّ: $\int_{\Gamma} f = F(z_T) - F(z_I)$

حيث z_I بداية الطريق Γ و z_T نهايته.

نتيجة: إذا تحقّقت شروط المبرهنة وكان Γ مغلقاً فإنّ: $\int_{\Gamma} f(z)\, dz = 0$

ملاحظة: إذا كان $G = \mathbb{C}$، وتحقّقت شروط المبرهنة، فإنّ تكامل f سيكون مستقلاً عن الطريق المسلوك من أي نقطة z_1 إلى أي نقطة z_2، وسنرمز للقيمة المشتركة للتكاملات على الطرق التي بدايتها z_1 ونهايتها z_2 بالرمز $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz$ ، وسيعطى هذا التكامل بالمساواة:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz = F(z_2) - F(z_1)$$

مثال: هل للرمز $\int_{i}^{2i} \cos z\, dz$ معنى، وإذا كان له معنى فما قيمته.

الحل: إنّ $\cos z$ تابع مستمر على $\mathbb{C}$، وله تابع أصلي على $\mathbb{C}$ وهو $\sin z$، إذن يوجد للرمز $\int_{i}^{2i} \cos z\, dz$ معنى. ويكون:

$$\int_{i}^{2i} \cos z\, dz = \sin(2i) - \sin(i) = i\big(sh(2) - sh(1)\big)$$

متتاليات ومتسلسلات التوابع العقدية:

تعاريف: لتكن $\{f_n\}$ متتالية من التوابع العقدية المعرّفة على مجموعة A، وليكن f تابعاً معرفاً على A. عندئذٍ:

- نقول إن المتتالية f_n متقاربة ببساطة أو نقطياً نحو f على A إذا وفقط إذا كانت المتتالية العقدية $f_n(z)$ متقاربة من $f(z)$ لأجل كل z من المجموعة A ، أي إذا تحققت العلاقة:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z) \quad : \quad \forall z \in A$$

في حال التقارب البسيط، نُسمّي التابع f بالنهاية البسيطة لـ f_n على A ، ونرمز لذلك بـ $f \longrightarrow f_n$.

- نقول إن المتتالية f_n متقاربة بانتظام نحو f على A إذا وفقط إذا تقاربت المتتالية الحقيقية $\left\{\mu_n = \sup_{z\in A}|f_n(z) - f(z)|\right\}$ متقاربة من الصفر، أي إذا:

$$\mu_n = \sup_{z\in A}|f_n(z) - f(z)| \longrightarrow 0$$

وللدلالة على التقارب بانتظام للمتتالية f_n من التابع f على A ، سنستخدم الرمز $f_n \overset{u}{\longrightarrow} f$ على A أو $f = u - lim\, f_n$ على A. ونُسمّي f ، في هذه الحالة النهاية المنتظمة للمتتالية f_n على A .

ملاحظة: إذا كانت $\{f_n\}$ متقاربة بانتظام فهي متقاربة ببساطة، وإن النهاية المنتظمة لها هي النهاية البسيطة لها. لكن العكس غير صحيح.

ملاحظة: إذا كانت $\{f_n\}$ متتالية من التوابع العقدية المستمرة على A وكان $f = lim\, f_n$ على A، فليس من الضروري أن يكون f مستمراً على A. لكن لو كان هذا التقارب بانتظام على A، فإنّ النهاية f ستكون تابعاً مستمراً على A.

- نقول عن المتسلسلة $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k$ إنّها متقاربة ببساطة على A، ومجموعها يساوي f إذا وفقط إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية لها متقاربة ببساطة نحو f على A. أي إذا كانت المتتالية المعرفة بالمساواة:

$$S_n = \sum_{k=k_0}^{n} f_k = f_{k_0} + \cdots + f_n : for\ all\ n \geq k_0$$

متقاربة ببساطة نحو f على A ، ونُسمّي f في هذه الحالة المجموع البسيط للمتسلسلة $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k$ ، وللدلالة على ذلك، نكتب $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k = f$.

- نقول عن المتسلسلة $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k$ إنّها متقاربة بانتظام على A، ومجموعها f إذا وفقط إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية لها $\{S_n\}$ متقاربة بانتظام نحو f على A . للدلالة

على التقارب بانتظام للمتسلسلة نحو f على A نكتب: $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k \overset{u}{=} f$ على A، ونسمي f المجموع المنتظم للمتسلسلة على A.

ملاحظة: إذا كان $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k = f$ على A و f_k توابع مستمرة على A، فليس من الضروري أن يكون f مستمرا على A. أما إذا كان $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k \overset{u}{=} f$ على A و f_k توابع مستمرة على A فإنّ f مستمر على A.

مبرهنة كوشي: ليكن f تحليليا على منطقة G، وليكن القرص المغلق $\overline{D}(a,r)$ محتوى في G. عندئذٍ فإنّ:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad : \quad \forall z \in D(a,r)$$

للتذكير: $C^+(a,r)$ هو الدائرة التي مركزها a ونصف قطرها r الممسوحة مرة واحدة بالاتجاه الموجب.

نتيجة 1: إذا f تحليليا على منطقة تحوي لصاقة قرص $D(a,r)$، فمعرفة قيم التابع f على محيط القرص كافٍ لمعرفة قيم f عند كل نقاط ذلك القرص.

نتيجة2: إذا كان f تحليلياً على محيط وداخل القرص $D(a,r)$ فإنّ:

$$\int_{C^+(a,r)} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i\, f(z_0) : \forall z_0 \in D(a,r)$$

تمرين: احسب تكامل $\int_\gamma \frac{\sin z}{z^2+1} dz$ وذلك في الحالتين التاليتين:

1) $\gamma(t) = i + e^{it} : 0 \le t \le 2\pi$

2) $\gamma(t) = 2e^{it} : 0 \le t \le 2\pi$

الحل:

إنّ التابع المكامل تحليلي على $\mathbb{C}\backslash\{-i,i\}$.

1. يُمثّل التابع في الطلب الأول المنحني $C^+(i,1)$، أي الدائرة التي مركزها i ونصف قطرها 1 الممسوحة مرة واحدة بالاتجاه الموجب، ثم إن:

$$\int_{C^+(i,1)} \frac{\sin z}{z^2+1} dz = \int_{C^+(i,1)} \frac{\frac{\sin z}{z+i}}{z-i} dz$$

إذا أخذنا $f(z) = \frac{\sin z}{z+i}$ فإن هذا التابع تحليلي على $\mathbb{C}\backslash\{i\}$، أي أنّه تحليلي على محيط وداخل القرص $D(i,1)$، وبما أن i نقطة من القرص $D(i,1)$، فحسب نتيجة 2 من مبرهنة كوشي نجد أن:

$$\int_{C^+(i,1)} \frac{\frac{\sin z}{z+i}}{z-i} dz = 2\pi i\, f(i) = 2\pi i \frac{\sin i}{i+i} = \pi \sin i$$

$$= \pi \frac{e^{i(i)} - e^{-i(i)}}{2i} = i\pi sh\,(1)$$

2. إن منحني التكامل في هذه الحالة هو $C^+(0,2)$، وبما أن هذا المنحني يحوي نقطتين شاذتين للمكامل هما i ، $-i$ (المكامل غير تحليلي عندهما) فإننا لا نستطيع استخدام مبرهنة كوشي لحساب التكامل بشكله الحالي. لذلك، سنفرق المكامل إلى مجموع تابعين:

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i}$$

لحساب A نضرب الطرفين بـ $z-i$ ، ونجعل z تسعى إلى i. ومنه $A = \frac{1}{2i}$

لحساب B نضرب الطرفين بـ $z+i$ ، ونجعل z تسعى إلى $-i$. ومنه $B = -\frac{1}{2i}$

وأخيراً نضرب الطرفين بـ $\sin z$ فيصبح لدينا:

$$\frac{\sin z}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{\sin z}{z-i} - \frac{\sin z}{z+i}\right)$$

بالمكاملة نجد:

$$\int_{C^+(0,2)} \frac{\sin z}{z^2+1} dz = \frac{1}{2i}\left(\int_{C^+(0,2)} \frac{\sin z}{z-i} dz - \int_{C^+(0,2)} \frac{\sin z}{z+i} dz\right)$$

لنأخذ $f(z) = \sin z$ وهو تابع تحليلي على محيط وداخل القرص $D(0,2)$، كما أنّ $i, -i$ ينتميان إلى $D(0,2)$. ومنه حسب مبرهنة كوشي:

$$\int_{C^+(0,2)} \frac{\sin z}{z^2+1} dz = \frac{1}{2i}[2\pi i \sin(i) - 2\pi i \sin(-i)] = 2\pi \sin i = 2\pi ish \ (1)$$

...انتهت المحاضرة الرابعة عشر...